Les nombres complexes

Le plan complexe

Opérations sur les nombres complexes

Conjugué d'un nombre complexe

Module et argument d'un nombre complexe

Propriétés du module et des arguments

La notation exponentielle

Equations du second degré à cofficients réels

Nombres complexes et transformations

1) La notion de nombre complexe

Théorème admis :

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

* $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels
* L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
* Il existe un nombre complexe noté i tel que $\boxed{i^2 = -1}$
* Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $\boxed{z = x + iy}$ avec $\boxed{x \text{ et } y \text{ réels}}$

i : Euler en 1777
Généralisation de l'emploi par Gauss en 1830

Exemples :

$z = -2 + 5i \in \mathbb{C}$

$z' = -3i \in \mathbb{C}$

$z'' = \sqrt{2} \in \mathbb{C}$

Définition

L'écriture $z = x + iy$ avec $\boxed{x \text{ et } y \text{ réels}}$ est appelée la forme algébrique du nombre complexe z.

x est la partie réelle notée $Re(z)$

y est la partie imaginaire notée $Im(z)$.

Exemples $z = 2 - i\sqrt{3}$

$Re(z) = 2$ et $Im(z) = -\sqrt{3}$

Remarques : $\begin{cases} Im(z) \in \mathbb{R} \\ Re(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$

Lorsque $y = 0$, z est réel

Lorsque $x = 0$, $z = iy$ et est appelé imaginaire pur.

Propriété : 2 nombres complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire

Remarque : Cette propriété découle de l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique.

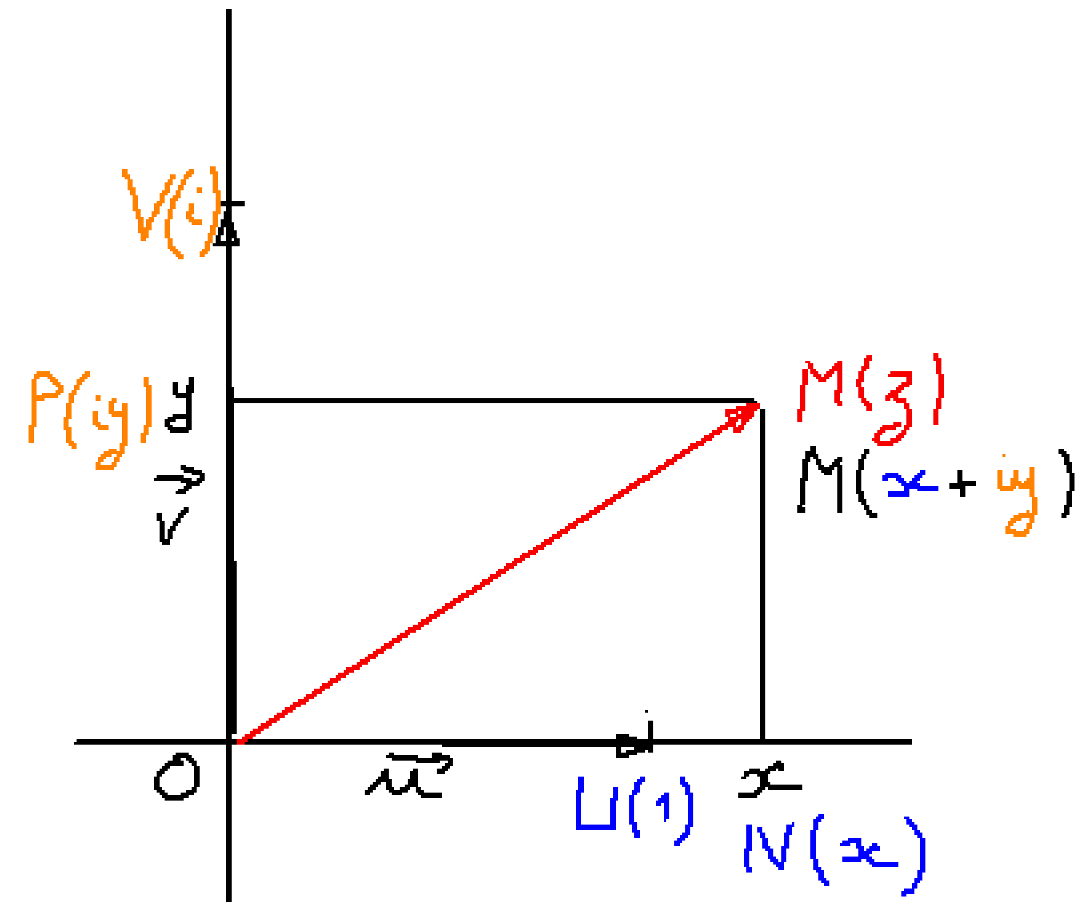
En particulier, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$x + iy = 0$ ssi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

2) Représentation géométrique

Définitions : $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan.

* A tout nombre complexe z, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$. On dit que M est le point image de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur $\boxed{\text{image}}$ de z.
* Tout point $M(x; y)$ est le point image d'un seul nombre complexe complexe $z = x + iy$. On dit que z est $\boxed{\text{l'affixe}}$ du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
* Le plan est alors appelé le $\boxed{\text{plan complexe}}$.



$z = x + iy$ est l'affixe de z

On note souvent sur le graphique $M(z)$

Méthodes

→ Placer un point d'affixe donnée

→ Lire l'affixe d'un point donné

→ Relier géométrie et nombres complexes

Les nombres complexes

Le plan complexe

Opérations sur les nombres complexes

Conjugué d'un nombre complexe

Module et argument d'un nombre complexe

Propriétés du module et des arguments

La notation exponentielle

Equations du second degré à cofficients réels

Nombres complexes et transformations

2) Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

1) Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

a) Règles de calcul

Prolongation de + et x des nombres réels aux nombres complexes (Cauchy 1789 - 1857)

Remarques :

* Identités remarquables
* $zz' = 0$

b) Représentation de la somme

4ème sommet du parallélogramme

2) Inverse et quotient

Propriété : Tout nombre complexe non nul z admet un unique inverse noté $\frac{1}{z}$

Méthode : Pour obtenir la forme algébrique de $\frac{1}{x+iy}$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $x+iy \neq 0$) on multiplie le numérateur et le dénominateur par $x-iy$

Méthodes

- → Déterminer des formes algébriques
- → Calculer les puissances de i
- → Utiliser les complexes dans une configuration géométrique.

Les nombres complexes

Le plan complexe

Opérations sur les nombres complexes

Conjugué d'un nombre complexe

Module et argument d'un nombre complexe

Propriétés du module et des arguments

La notation exponentielle

Equations du second degré à cofficients réels

Nombres complexes et transformations

3) Conjugué d'un nombre complexe

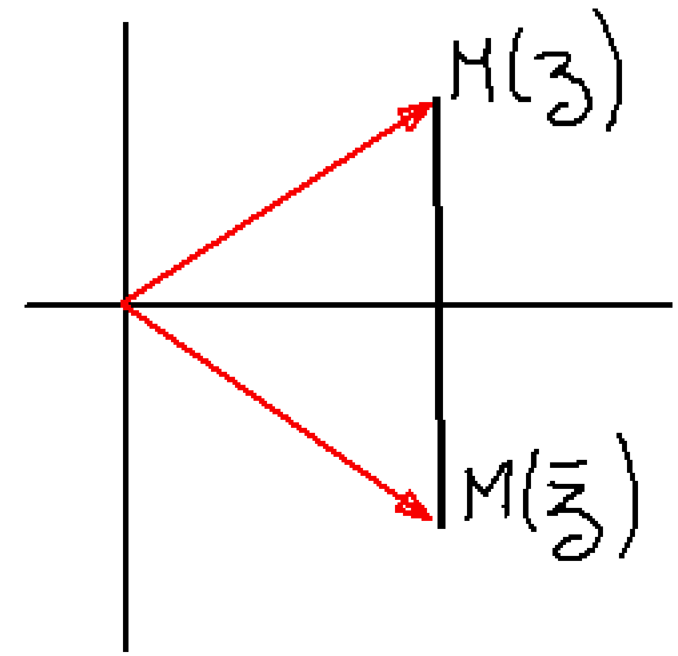
1) Définition du conjugué

<u>Définition</u> : z est un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (x, y réels), le nombre complexe $x - iy$, noté $\bar{z}$ est appelé conjugué de z.

<u>Conséquences</u>

* $\bar{\bar{z}} = z$
* $z\bar{z} = x^2 + y^2$
* $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
* $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

2) Interprétation géométrique



Propriétés : z est un nombre complexe.

* z réel équivaut à $\bar{z} = z$
* z est imaginaire pur équivaut à $\bar{z} = -z$

Démonstration

* z réel équivaut à $M \in (O, \vec{u})$

$S = S_{(O,\vec{u})}$ $\quad M' = S(M)$

$M \in (O, \vec{u})$ équivaut à $M' = M$

donc ....

* z imaginaire pur équivaut à $M \in (O, \vec{v})$

$M \in (O, \vec{v})$ ssi M' et M sont symétriques par rapport à O donc

....

3) Conjugué et opérations

Propriétés : z, z' appartiennent à $\mathbb{C}$
n : entier naturel non nul.

* $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
* $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
* $\overline{z}^{\,n} = \overline{(z^n)}$
* $z \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
* $z \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Démonstration produit :

$zz' = (x+iy)(x'+iy')$

$=$

$\overline{zz'} =$

$\overline{z} \cdot \overline{z'} = (x-iy)(x'-iy')$

$=$

$\overline{z} \cdot \overline{z'} =$

Méthodes

→ Prouver sans calcul

→ Utiliser les propriétés des opérations sur les nombres conjugués

→ Rechercher un ensemble de points

* $z^2 + \bar{z}$ est réel